Corso di laurea in Fisica, a.a. 2020/21, Analisi - 27 gennaio 2021 **B**
(N. Ansini - G. Galise - C. Pinzari- M. Ponsiglione)

Nome: *Cognome:* *Orale: I appello* ☐ *II appello* ☐
Modalità: in presenza ☐ *da remoto* ☐

Regole: Voto minimo di ogni esercizio = 0. Esercizi 1-4: risposta giusta = 1, risposta omessa = 0, risposta sbagliata =-0.5. Esercizi 5-6: punti 0-8

Esercizio 1 Si consideri la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di termine generale $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{3^n + \sqrt{n}}{5^n - n}$

1. Per ogni $N \in \mathbb{N}$ risulta $\inf\limits_{n\geq N} a_n < 0$ V F
2. L'insieme $\left\{a_n \ : \ |a_n| \leq \frac{1}{100}\right\}$ non ammette minimo V F
3. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente V F
4. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è superiormente limitata V F

Esercizio 2 Siano $f(x) = \arctan(x)$, $g(x) = e^x$, $h(x) = g(f(x)) - f(g(x))$

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{g(f(x))}{1+x^2}\,dx > \sqrt{e} - 1$ V F
2. $x = \frac{\pi}{2}$ è un punto di discontinuità per $g(f(x))$ V F
3. L'equazione $g(f(x)) = c$ ammette soluzione per ogni $c \in (e^{-\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}})$ V F
4. $\exists x_o \in [0,1]$ tale che $h(x) \leq h(x_o)$ $\forall x \in [0,1]$ V F

Esercizio 3 Si considerino le funzioni $f(x) = |x|\sin(x)$ e $g(x) = \sin(x + x^3) - \sin(x)$

1. $g(x) = x^3 + o(x^4)$ per $x \to 0$ V F
2. $g^{(4)}(0) < 0$ V F
3. $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $(f+g)'(c) = 0$ V F
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{f(x)} > 0$ V F

Esercizio 4 Siano $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ ed $F(x) = \displaystyle\int_0^x \tan(f(t))\,dt$

1. $x = -\pi$ è un punto di minimo assoluto per $F(x)$ V F
2. $F(x)$ è derivabile in $\mathbb{R}$ V F
3. $F(x^4)$ risulta convessa in $\mathbb{R}$ V F
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x} < 0$ V F

Esercizio 5 Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{|\ln(x^4)| - 1}$$

1. determinare il dominio di f e studiarne il segno;
2. studiare gli asintoti, continuità e derivabilità ;
3. studiare punti di max, min e flessi evidenziando gli eventuali intervalli in cui la funzione f e' convessa;
4. disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 6 Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) - \cos(t)y(t) = 2\cos(t) \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Determinare:

1. la soluzione generale dell'equazione omogenea;

2. la soluzione generale dell'equazione non omogenea;

3. la soluzione del problema di Cauchy;

4. calcolare $y(-\frac{\pi}{2})$.